Université Hassan 1
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A.U. 2017-2018
Filière: SMA/SMI
Responsable: N.MRHARDY

Analyse I

Durée: 2h

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Questions de cours.(*4 pts*)

(1) (a) Rappeler l'énoncé de la caractérisation de la borne supérieure.
(b) On suppose que A et B possédent chacune une borne supérieure. Montrer que l'ensemble $A+B$ posséde une borne supérieure et de plus ;

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

(2) (a) Rappeler la définition de la densité d'un ensemble D dans $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.(*4 pts*)

Soit $a > 0$. On définit les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ par

$$x_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n), \qquad y_n = a + a^2 + \dots + a^n$$

(1) Montrer que la suite $(x_n)_n$ est croissante.
(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer (y_n) puis déduire que si $0 < a < 1$ alors (y_n) est majorée.
(3) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$1 + x \leq e^x$$

(4) En déduire que si $0 < a < 1$ alors $(x_n)_n$ est convergente.

Exercice 2.(*2 pts*)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue strictement positive, on suppose que f est dérivable sur $]a,b[$. Monter qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right)$$

Exercice 3.(*3 pts*)

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \arccos(\tanh x), \qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\cosh x}\right)$$

(1) Préciser le domaine de définition et de dérivabilité de chacune des fonctions f et g puis calculer leurs dérivées.
(2) En déduire une relation entre f et g.

T.S.V

Exercice 4. (*5 pts*) T.D.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x)+1}$$

(1) Déterminer le domaine de définition de f puis calculer les limites sur ses bornes.
(2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0? Si oui donner son prolongement en 0.
(3) Montrer directement que f est strictement monotone sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$. (sans utiliser la dérivée).
(4) En déduire que f est bijective de $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera puis déterminer f^{-1}.

Exercice 5. (*2 pts*).

(1) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a T.D

$$\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$$

(2) En déduire que l'application $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.